OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2026

CLASA A XI-a

SUBIECTUL I (40 de puncte)

Pentru fiecare dintre următoarele 10 probleme, una singură dintre cele cinci variante de răspuns este corectă. Pe formularul de înregistrare a răspunsurilor la problemele cu alegere multiplă (grilă), indică varianta corectă de răspuns:

(4p) 1. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$. Dacă p este numărul inversiunilor lui σ și $k \in \mathbb{N}^*$ este cel mai mic număr natural pentru care $\sigma^k = e$, atunci $p+k$ este egal cu:

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

(4p) 2. Limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, de termen general $a_n = \sqrt{n^2+3n-3} - \sqrt{n^2-3n+10}$, este egală cu:

A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$ E. 3

(4p) 3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = A^{2026} + A^{2025} + A^{2024}$. Dacă $\Delta = \det B$, atunci Δ este:

A. 1 B. 0 C. 2 D. 4 E. 3

(4p) 4. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_1 = \sqrt{2}$ și $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, pentru oricare $n \geq 1$. Limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu:

A. -1 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2 E. 3

(4p) 5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ și $M = \{a \in \mathbb{R} \mid A \text{ este inversabilă pentru orice } x \in \mathbb{R}\}$.

Mulțimea M este egală cu:

A. $(2,\infty)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ E. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2,\infty)$

(4p) 6. Limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}\right)$ este egală cu:

A. $\frac{1}{6}$ B. 0 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$ E. $\frac{1}{12}$

(4p) 7. Suma pătratelor soluțiilor reale ale ecuației $\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$ este egală cu:

A. 15 B. 16 C. 67 D. 55 E. 49

(4p) 8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-x$.

Dacă $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ și $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)$, atunci suma $m+n$ este egală cu:

A. 1 B. -2 C. -3 D. 3 E. 2

(4p) 9. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Valoarea sumei $S=a+b+c+d$ este:

A. $\dfrac{4}{9}$ B. $\dfrac{15}{4}$ C. 2 D. $\sqrt[3]{15}$ E. $\dfrac{7}{16}$

(4p) 10. Dacă $L=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{4n^2+5n+2}\right)$, atunci L este egal cu:

A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C. -1 D. 0 E. 1

La subiectele II și III scrieți rezolvările complete:

SUBIECTUL II (25 de puncte)

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $E=A^{2026}+B^{2026}$.

a) Arătați că $AB=BA$.

b) Calculați $\det E$.

SUBIECTUL III (25 de puncte)

Șirurile de numere naturale $(a_n)_{n\geq1}$ și $(b_n)_{n\geq1}$ au proprietatea că

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}\text{, pentru orice } n\geq1.$$

Determinați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 9 / 2025

Note: Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 3 ore.